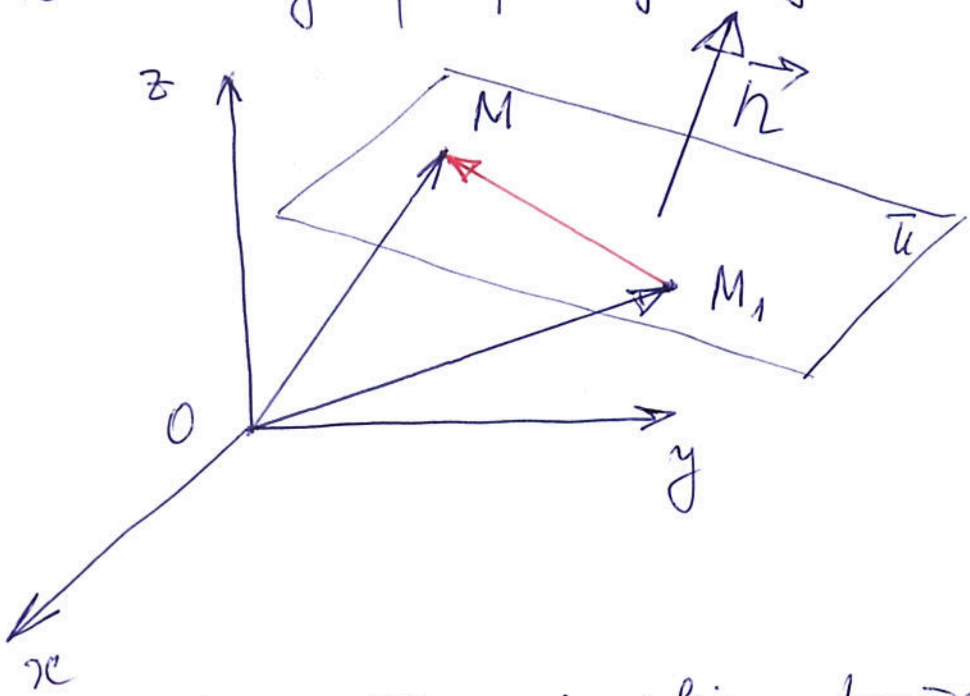
Ravan i prava u prostoru

Ravan

Neka je u prostoru $Oxyz$ ravan π zadata tačkom $M_1(\vec{r_1})$, koju određuje radijus vektor $\vec{r_1}$ i vektorom normale $\vec{n}$ ($\vec{n}$ je vektor koji je normalan na tu ravan, odnosno na sve vektore koji pripadaju toj ravni).



Neka je $M(\vec{r})$ proizvoljna tačka sa ravni π koja određuje radijus vektor $\vec{r}$. Vektori $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r_1}$ i $\vec{n}$ su međusobno ortogonalni. Odnosno, znači, $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_1M} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M} = 0$.

$$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_1}) = 0}$$

Ovo je vektorska jednačina ravni u prostoru kroz zadatu tačku.

Iz posljednje jednačine je:

$$\vec{n}\cdot\vec{r}-\vec{n}\cdot\vec{r}_1=0$$

Označimo sa $D=-\vec{n}\cdot\vec{r}_1$. Tada dobijamo vektorski oblik opšte jednačine ravni u prostoru:

$$\boxed{\vec{n}\cdot\vec{r}+D=0}$$

Neka su vektori $\vec{n}$ i $\vec{r}_1$ zadati svojim koordinatam u prostoru:

$\vec{n}=(A,B,C)$ $\vec{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$

a vektor $\vec{r}=(x,y,z)$. Tada dobijamo:

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$$

skalarni oblik opšte jednačine ravni u prostoru

i $$\boxed{A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0}$$

skalarni oblik jednačine ravni kroz zadatu tačku.

Ako je $D=0$ onda ravan sadrži koordinatni početak, odnosno tačka $O(0,0,0)$ pripada ravni.

Neka je $D\neq 0$. Podijelimo jednačinu $Ax+By+Cz+D=0$ sa D. Imamo da je

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$

Označimo sa $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$. Tada dobijamo:

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$$

segmentni oblik jednačine ravni.

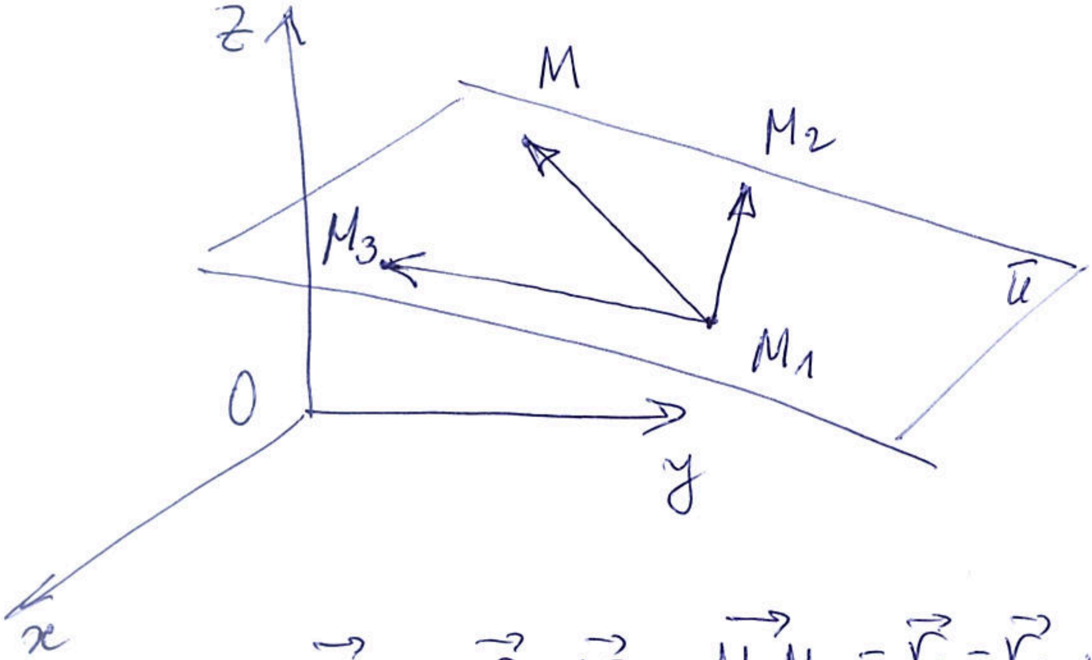
Brojevi a, b i c su odsječci koje ravan odsjeca na koordinatnim osama.
Na primjer, za $y=0, z=0$ imamo iz segmentne jednačine ravni da je $\frac{x}{a}=1$, tj. $x=a$. Znači ravan prolazi kroz tačku $A(a,0,0)$, odnosno a je odsječak na Ox osi.
Iz jednačine, $\vec{n}\cdot\vec{r}+D=0$, ako je podijelimo sa $|\vec{n}|\neq 0$ dobijamo $\vec{n}_0\cdot\vec{r}+\frac{D}{|\vec{n}|}=0$.
Označimo sa $p=-\frac{D}{|\vec{n}|}$. Odavde, imamo da je

$$\boxed{\vec{r}\cdot\vec{n}_0-p=0}$$

normalni oblik jednačine ravni. Ili u skalarnom obliku:

$$\boxed{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0}$$

gdje je $\vec{n}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, a α, β i γ uglovi koje vektor $\vec{n}$ zaklapa sa koordinatnim osama.
Znamo da tri tačke u prostoru koje ne leže na istoj pravoj definišu jedinstvenu ravan. Nadimo jednačinu te ravni. Neka su zadate tačke $M_1(\vec{r}_1)$, $M_2(\vec{r}_2)$ i $M_3(\vec{r}_3)$ sa ravni koje ne leže na istoj pravoj. Neka je $M(\vec{r})$ proizvoljna tačka sa te ravni.



Vektori $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$, $\overrightarrow{M_1M_3} = \vec{r_3} - \vec{r_1}$ i $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r_1}$ leže u istoj ravni $\bar{u}$. Znači, ova tri vektora su komplanarna. Slijedi da je njihov mješoviti proizvod jednak nuli: $\overrightarrow{M_1M} \cdot (\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$.

Odnosno,

$$\boxed{(\vec{r} - \vec{r_1}) \cdot \left((\vec{r_2} - \vec{r_1}) \times (\vec{r_3} - \vec{r_1}) \right) = 0}$$

vektorski oblik jednačine ravni kroz tri tačke.

Skalarni oblik je:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

Jednačina ravni kroz tri tačke

gdje su $\vec{r_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r_2} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{r_3} = (x_3, y_3, z_3)$, a $\vec{r} = (x, y, z)$.

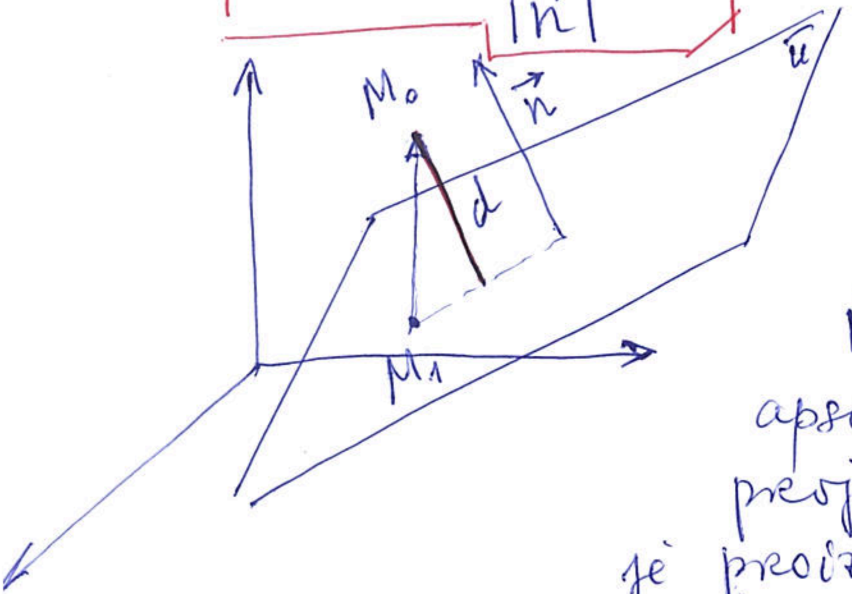
Rastojanje tačke i ravni

Neka je zadata tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ $(\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0))$ i ravan $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ $(\vec{n} \cdot \vec{r} + D = 0)$.

Rastojanje tačke M_0 do ravni π se računa po formuli:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

ili $\boxed{d = \frac{|\vec{r_0} \cdot \vec{n} + D|}{|\vec{n}|}}$.



Rastojanje tačke M_0 do ravni je jednako projekciji vektora $\overrightarrow{M_0M_1}$ na vektor $\vec{n}$ $\vec{n} = (A, B, C)$, odnosno apsolutnoj vrijednosti te projekcije. Tačka M_1 je proizvoljna tačka sa ravni.

$$d = |pr_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1M_0}| = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} =$$

$$= \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

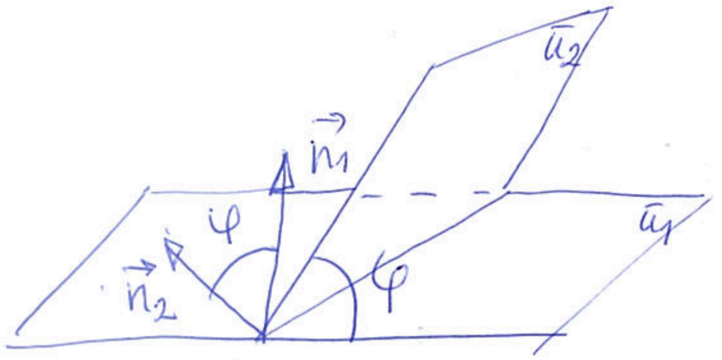
$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Pošto je $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ imamo da je $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$ jer $M_1(x_1, y_1, z_1)$ pripada ravni.

Odavde dobijamo našu formulu za rastojanje

$$d = \frac{|Ax_0 + By + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Ugao između dvije ravni



Neka su zadate dvije ravni $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D=0$ i $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.
Ugao između te dvije ravni je jedan od uglova (suplementnih) koje obrazuju te dvije ravni.
Pod uglom između ravni π_1 i π_2 podrazumijevamo ugao koji zaklapaju njihovi vektori normala $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$. Prema tome,

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}} \text{ ili } \boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}}$$

Ako su ravni ortogonalne onda je uslov normalnosti ravni π_1 i π_2:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \quad \text{ili} \quad \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0.$$

Uslov paralelnosti ove dvije ravni je da su vektori $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ kolinearni (paralelni) tj

$$\vec{n}_1=\lambda\vec{n}_2 \text{ ili } \vec{n}_1\times\vec{n}_2=\vec{0} \text{ ili } \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \text{ ili } \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\vec{0}$$

Prava u prostoru

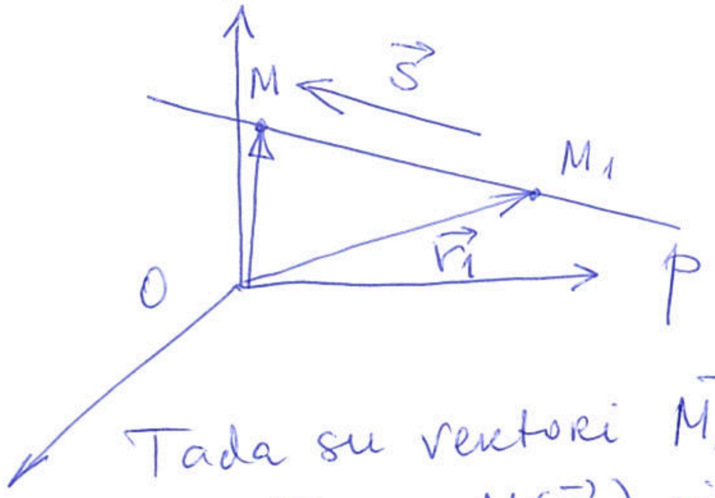
Opšti oblik jednačine prave u prostoru je dat presjekom dvije ravni:

$$\begin{cases} \vec{n_1}\cdot\vec{r}+D_1=0 \\ \vec{n_2}\cdot\vec{r}+D_2=0 \end{cases} \quad \text{ili} \quad \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

Nešto kasnije ćemo se vratiti na opštu jednačinu prave u prostoru.

Jednačina prave kroz zadatu tačku

Položaj prave u prostoru je u potpunosti određen ako je zadata tačka M_1 na pravoj i vektor $\vec{s}$ koji je paralelan toj pravoj, koji nazivamo vektorom pravca prave.



Neka je data prava p koja prolazi kroz tačku $M_1(\vec{r_1})$, a koja je paralelna vektoru pravca $\vec{s}$.

Tada su vektori $\overrightarrow{M_1M}$ i vektor $\vec{s}$ kolinearni vektori. Tačka $M(\vec{r})$ je proizvoljna tačka sa prave. znači, $\overrightarrow{M_1M}=t\vec{s}$, odnosno,

$\boxed{\vec{r}=\vec{r_1}+t\vec{s}}$ što predstavlja vektorsku jednačinu prave kroz zadatu tačku

Neka je $\vec{r_1}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{s}=(m,n,p)$, a $\vec{r}=(x,y,z)$.

Tada imamo da je

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(m, n, p)$$

Odavde dobijamo da je

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + tm \\ y = y_1 + tn \\ z = z_1 + tp \end{cases}}$$

što predstavlja parametarske jednačine prave

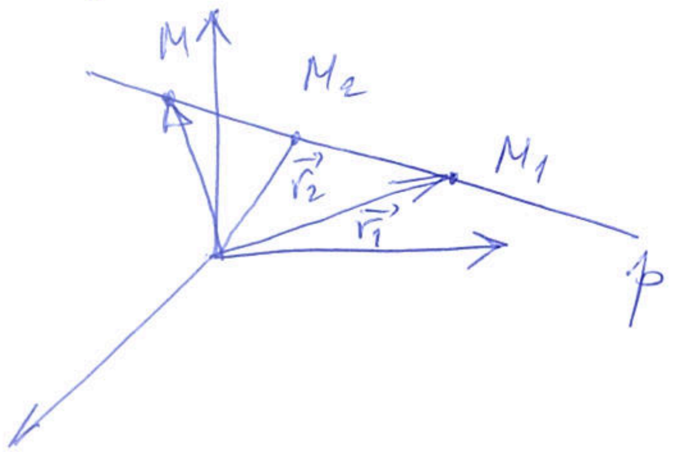
Odavde, vidimo da su vektori $(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$ i (m, n, p) ~~p~~ kolinearni, odnosno da su im odgovarajuće koordinate proporcionalne. Tačnije, imamo

$$\boxed{\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}}$$

kanonske jednačine prave

Jednačina prave kroz dvije tačke

Znamo da je prava u prostoru određena sa svoje dvije tačke. Neka su date tačke $M_1(\vec{r_1})$ i $M_2(\vec{r_2})$



Vektor $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ je vektor pravca prave p

Znači,

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r_1} + t(\vec{r_2} - \vec{r_1})}$$

je vektorska jednačina prave kroz dvije tačke

Neka je $\vec{r_1}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{r_2}=(x_2,y_2,z_2)$, a
$\vec{r}=(x,y,z)$ - radijus vektor proizvoljne tačke sa prave. Tada su <u>parametarske jednačine prave kroz dvije tačke</u>:

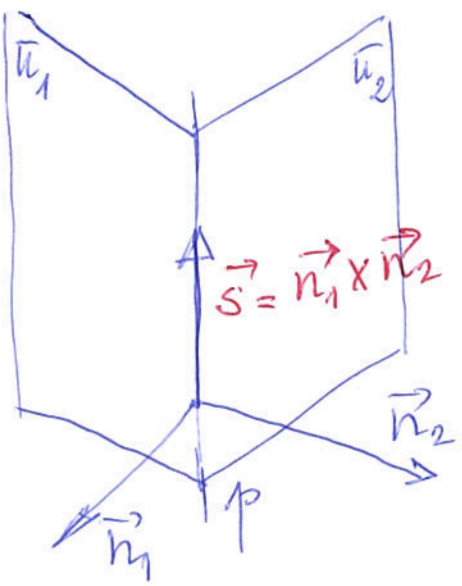
$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + t(x_2-x_1) \\ y = y_1 + t(y_2-y_1) \\ z = z_1 + t(z_2-z_1) \end{cases}}$$

a kanonska jednačina prave kroz dvije tačke:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$$

Vratimo se opštoj jednačini prave

$$p: \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$



Od opšteg oblika možemo preći na kanonskom obliku jednačine prave imajući u vidu da je

$$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

a tačku M_1 dobijamo iz sistema jednačina, pri čemu uzmemo da je jedna od koordinata jednaka nuli.

Primjer Napisati kanonske jednačine prave koja je zadata jednačinama:

$$\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y-3z+5=0 \end{cases}$$

Rješenje Uzmimo da je $z=0$. Rješavajući sistem jednačina $\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x-y+5=0 \end{cases}$ dobijamo da je $x=-2$, $y=1$. Tako smo našli tačku $M_1(-2,1,0)$ sa prave.

Vektor pravca prave $\vec{s} = \lambda(\vec{n_1} \times \vec{n_2})$ tj

$$\vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} = (-4,1,-3)$$

Uzmimo za $\vec{s} = (4,-1,3)$ (za λ smo uzeli $\lambda=-1$).

Kanonske jednačine prave su:

$$\boxed{\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}}$$

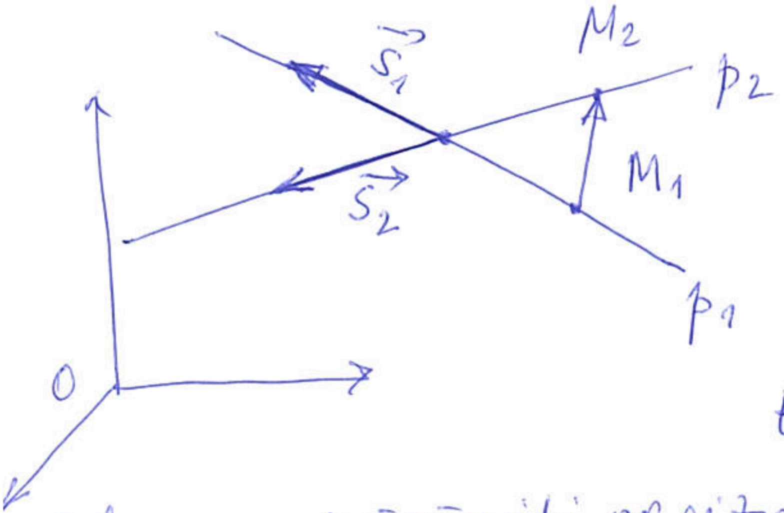
Ovaj smo zadatak mogli riješiti i tako što ćemo naći drugu tačku M_2 koja pripada pravoj. Uzmimo $y=0$. Riješimo sistem $\begin{cases} x-z=-1 \\ 2x-3z=-5 \end{cases}$ i dobijemo tačku $M_2(2,0,3)$. Zapišemo jednačinu prave kroz tačke M_1 i M_2:

$$\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}.$$

Uslov presjeka dvije prave

Uslov presjeka dvije prave nije ništa drugo nego uslov da dvije neparalelne prave leže u jednoj ravni. Neka su zadate prave p_1 i p_2:

$$p_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \quad p_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

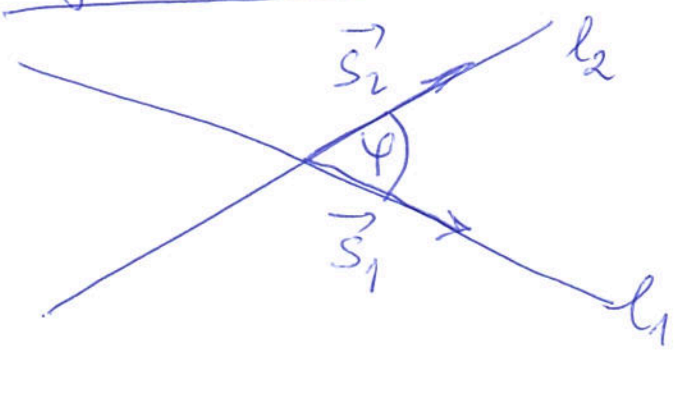


Tada vidimo da vektori $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ i vektori $\vec{s_1}$ i $\vec{s_2}$ moraju pripadati istoj ravni, tj. moraju biti komplanarni.

Odnosno, mješoviti proizvod ovih vektora mora biti jednak nuli. Znači, uslov presjeka dvije prave je:

$$\boxed{(\vec{r_2} - \vec{r_1}) \cdot (\vec{s_1} \times \vec{s_2}) = 0} \quad \text{ili} \quad \boxed{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0}$$

Ugao između dvije prave



Ugao između pravih l_1 i l_2 je ugao između njihovih vektora pravaca $\vec{S_1}$ i $\vec{S_2}$ tj

$$\measuredangle(l_1, l_2) = \measuredangle(\vec{s_1}, \vec{s_2}) = \varphi$$

Tada je

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}}{|\vec{s_1}|\cdot|\vec{s_2}|}} \quad \text{ili} \quad \boxed{\cos\varphi = \frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}}$$

Uslov paralelnosti pravih

$$\vec{s_1} = \lambda\vec{s_2} \quad \text{ili} \quad \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \quad \text{ili} \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

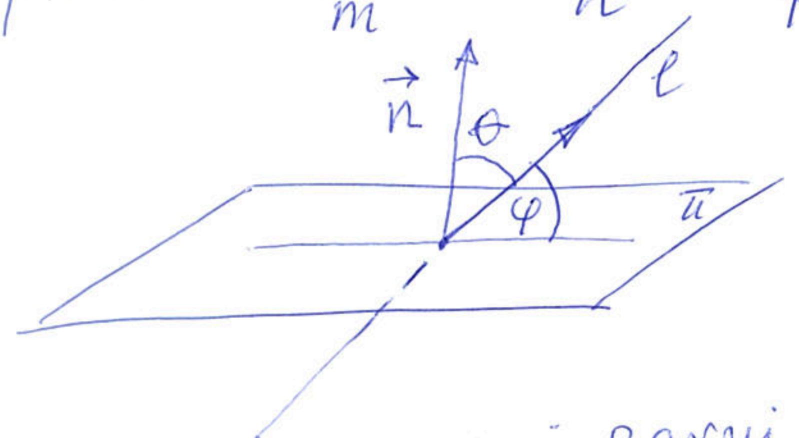
Uslov normalnosti pravih

$$\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}=0 \quad \text{ili} \quad m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

Prava i ravan u prostoru

Neka je zadata ravan $\pi : Ax+By+Cz+D=0$

i prava $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$.



Ugao između prave i ravni je ugao između prave i njene ortogonalne projekcije na ravan. (Bilo koji od dva suplementna ugla).

Pošto je θ ugao između vektora $\vec{n}$ i $\vec{s}$, onda je

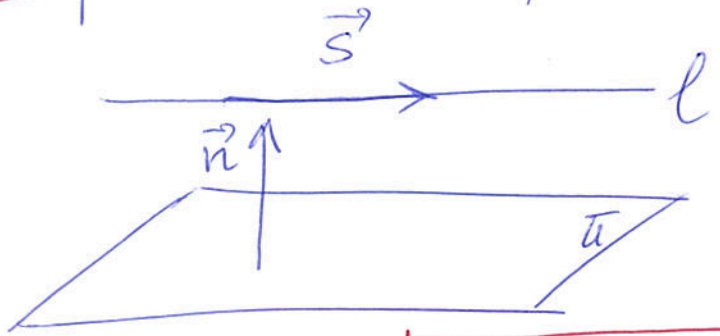
$$\cos\theta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{s}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}, \text{ a znamo da je}$$

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\cdot\right) = \sin\varphi.$$

Znači,

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{\vec{n}\cdot\vec{s}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}} \text{ ili } \boxed{\sin\varphi = \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}}$$

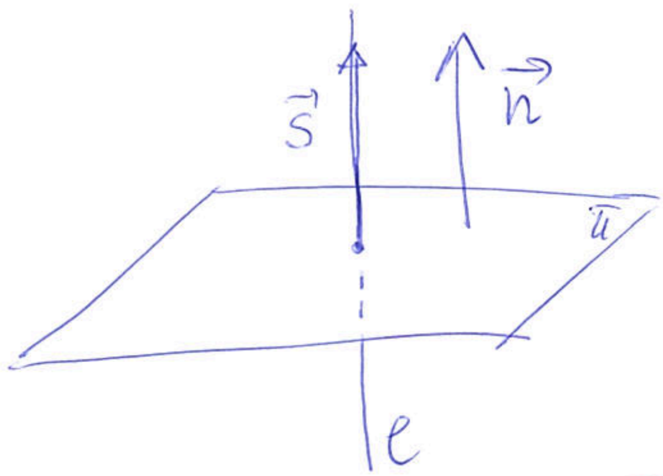
Uslov paralelnosti prave i ravni



Znači, vektori $\vec{n}$ i $\vec{s}$ moraju biti ortogonalni, tj

$$\boxed{\vec{n}\cdot\vec{s}=0} \text{ ili } \boxed{Am+Bn+Cp=0}$$

Uslov normalnosti prave i ravni



Vektori $\vec{n}$ i $\vec{s}$ su paralelni, odnosno kolinearni.

Prema tome, uslov normalnosti je:

$$\boxed{\vec{n}=t\vec{s}} \text{ ili } \boxed{\vec{n}\times\vec{s}=\vec{0}} \text{ ili } \boxed{\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}}.$$

Uslov da prava pripada ravni

Prvo, moraju vektori $\vec{n}$ i $\vec{s}$ biti ortogonalni, a tačka $M_1(x_1,y_1,z_1)$ s prave mora zadovoljavati jednačinu ravni. Znači, uslov da prava pripada ravni je:

$\vec{n}\cdot\vec{s}=0$ i $\vec{n}\cdot\vec{r}_1+D=0$

ili $\begin{cases} Am+Bn+Cp=0 \\ Ax_1+By_1+Cz_1+D=0. \end{cases}$

<u>Primjer</u> Naći presjek prave $l: \dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y}{7}=\dfrac{z-1}{11}$ i ravni $\pi: x+y-z-3=0$.

<u>Rješenje</u> Napišimo parametarske jednačine ravni

$$\begin{cases} x=2+5t \\ y=7t \\ z=1+11t \end{cases}$$

Zamijenimo ih u jednačine ravni:

$$2+5t+7t-1-11t-3=0$$

Odavde je $t=2$. Zamijenimo to t u parametarske jednačine prave i tako dobijamo koordinate presječne tačke prave i ravni.

$x=12$
$y=14$
$z=23$

Presječna tačka je $A(12,14,23)$